ENSA Al Hoceima TD N 2 CP1 : Algèbre I

Pr. Y. Abouelhanoune

2018/2019

Structures Algébriques : Groupes et sous groupes

Exercice 1

On munit $A = \mathbb{R} * \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$(x, y) + (x\prime, y\prime) = (x + x\prime, y + y\prime)$ et $(x, y) * (x\prime, y\prime) = (xx\prime, xy' + x\prime y)$

1. Montrer que la loi $*$ est bien commutative.
2. Montrer que la loi $*$ est associative.
3. Déterminer l'élément neutre de A par la loi $*$
4. Montrer que $(A, +)$ est un groupe.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la de de composition interne T par

$$(x, y)T(x\prime, y\prime) = (x + x\prime, ye^{x\prime} + y\prime e^{-x})$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, T)$ est un groupe. Est-il abélien ?
2. determiner les sous groupes de $(\mathbb{R}^2, T)$.

Exercice 3

Soit $G = \mathbb{R}^* * \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par

$$(x, y) * (x\prime, y\prime) = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutative
2. Montrer que $(]0, +\infty[* \mathbb{R}, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$.

Exercice 4

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un monoïde pour la loi $*$ définie par

$$x * y = x + y - xy$$

2. Trouver les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}, *)$.

Exercice 5

Soit $(G, *)$ un groupe, et soit e son élément neutre.

On suppose que $\forall g \in G \quad g^2 = g * g = e$

1. Soient $x, y \in G$, déterminer $(x * y)^{-1}$.
2. Soient $x, y \in G$, déterminer x^{-1} et y^{-1}
3. En deduire que $(G, *)$ est commutative.

Exercice 6

Soit E l'ensemble des fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ telles que

$$\forall \alpha \in]0, +\infty[\qquad f(x) = x^\alpha$$

1. Montrer que f est une bijiction de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$
2. Montrer que E muni de la loi de composition o des fonctions est un groupe.

Exercice 7

1. Montrer que l'ensemble $A = \left\{\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \;\;,\;\; a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \right\}$ est un sous anneau de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $u = \sqrt{2} + 1$ est inversible dans A.